



جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران

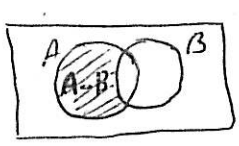
ساعت امتحان: ۱۱ صبح
وقت امتحان: ۹۰ دقیقه
تاریخ امتحان: ۱۳۹۶/۱۰/۱۴
تعداد برگ سؤال: ۲ برگ

ش سندلی (ش داوطلب): نام واحد آموزشی: دبیرستان هاتف نوبت امتحانی: دی ماه
نام خانوادگی: نام پدر: پایه: یا زدهم رشته: ریاضی
سؤال امتحان درس: آمار و احتمال نام دبیر/دبیران: آقای ارشدی سال تحصیلی: ۹۶-۹۷

۲	۱- جاهای خالی را پر کنید: الف) گزاره $(q \Rightarrow p) \Rightarrow p$ همواره است. ب) گزاره $(p \vee \sim q) \wedge (q \vee p)$ با استفاده از \Rightarrow به صورت است. ج) نقیض گزاره $\exists A, \forall B, (B \subset A)$ برابر د) مجموعه $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ دارای زیر مجموعه شامل عضو a است. ه) عدد اصلی مجموعه $p(p(p(\emptyset)))$ برابر است. و) اگر $A_n = \left(\frac{n-1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right) \cup \left(\frac{2n-1}{n}, \frac{4n+1}{n}\right)$ حاصل $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ برابر است. ز) سه تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم. احتمال اینکه اعداد روشده مضرب ۳ نباشند برابر است. ح) گزاره $(P \Rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ یک استلزام منطقی
۱	۲- ارزش گزاره زیر را تعیین کنید و نقیض آن را بدست آورید. $(\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0) \wedge (\forall a \in \mathbb{R}^+, a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2)$
۱	۳- ثابت کنید اگر a^2 مضرب ۳ باشد و a عددی صحیح باشد، a نیز مضرب ۳ است.
۱	۴- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S ثابت کنید: $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
۱	۵- از ۵۱ دانش آموز یک دبیرستان ۳۵ نفر در کلاس ادبی، ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده اند. چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت نکرده اند؟
۱/۵	۶- با استفاده از برهان خلف ثابت کنید: $A \times C = B \times C \quad C \neq \emptyset \Rightarrow A = B$
۱/۵	۷- قطعه چوب یک متری را از ۲ قسمت برش می دهیم با کدام احتمال ۳ قطعه چوب حاصل تشکیل یک مثلث می دهند؟
۱	۸- در یک تجربه تصادفی $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه ای است. اگر $P(x)$ و $P(y)$ و $P(z)$ به ترتیب یک دنباله هندسی با قدر نسبت $1/5$ تشکیل دهند. مطلوبست $P(\{x, z\})$
۱	۹- اگر گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow (r \vee s))$ نادرست باشد ارزش گزاره $(p \wedge r) \Leftrightarrow \sim p$ با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱	۱۰- اگر $A = \{x x = 2k, 1 \leq k \leq 8, k \in \mathbb{N}\}$ باشد و الف) مجموعه A دارای چند زیر مجموعه ۵ عضوی شامل ۴ و فاقد ۱۰ می باشد؟ ب) تعداد زیر مجموعه های سره ناتهی A را مشخص کنید.
۱/۵	۱۱- با استفاده از عضوگیری ثابت کنید: $(A - B)^c = (A \times B') \cap (B' \times A)$
۱/۵	۱۲- با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید: الف) $A - (A \Delta B) = A \cap B$ ب) $A \cup (A \cap B) = A$
۱	۱۳- حاصلضرب دکارتی دو مجموعه $A = [-3, 2]$ و $B = \{2, -3\}$ را مشخص کنید. $(A \times B)$
۱	۱۴- مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۷ را به چند طریق می توان به سه زیر مجموعه افراز نمود؟
۱	۱۵- یک سکه حداقل چند بار پرتاب کنیم. تا احتمال آمدن حداقل یک رو بیش از ۹۹ درصد باشد؟
۱	۱۶- در رابطه $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x \leq 2, x \leq 2\}$ فاصله دورترین نقطه مجموعه S از مبدا مختصات را بدست آورید.
۱	۱۷- از میان اعداد $\{10000, \dots, 646566\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد مربع کامل ولی جذر آن مربع کامل نیست؟

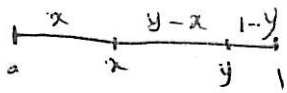
۱- الف) درست
 ب) $\neg P \Rightarrow F$
 ج) \exists
 د) است.
 ۲- $\forall A, \exists B, (\sim(B \subset A))$
 ۳- $(\exists a \in \mathbb{R}^+, a^r + \frac{1}{a^r} < r) \vee (\exists a \in \mathbb{R}, a^r < .)$
 ۴- $n^r = {}^r q \Rightarrow n = {}^r q' \equiv n \neq {}^r k \Rightarrow n^r \neq {}^r k$
 ۵- $n \neq {}^r q \Rightarrow n = {}^r q + r, r \in \{1, 2\}$
 ۶- $\Rightarrow n^r = {}^r q^r + {}^r q r + r^r \Rightarrow n^r = {}^r ({}^r q^r + {}^r q r) + r^r = {}^r q' + r^r$
 ۷- $r=1: n^r = {}^r q' + 1$
 ۸- $r=2: n^r = {}^r q' + 2$
 ۹- $A = (A-B) \cup (A \cap B) \Rightarrow (A-B), (A \cap B)$
 $P(A) = P((A-B) \cup (A \cap B)) \Rightarrow P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$
 $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$
 ۱۰- $|A' \cap B'| = |(A \cap B)'| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 51 - 31 - 35 + 23 = 8$
 ۱۱- درصت دارد:
 $A \perp B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \times C = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \\ B \times C = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset \end{cases}$
 ۱۲- $A \neq B \Rightarrow A \neq \emptyset, A \neq B$
 $\Rightarrow \exists x \in A, x \notin B, C \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in C$
 $\Rightarrow (x, y) \in A \times C, (x, y) \notin B \times C \Rightarrow A \times C \neq B \times C$
 فرض مسئله در تقاض است بر کمینه است نوبت اول



۴- $A = (A-B) \cup (A \cap B) \Rightarrow (A-B), (A \cap B)$
 ۵- $P(A) = P((A-B) \cup (A \cap B)) \Rightarrow P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$
 ۶- $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$
 ۷- $|A' \cap B'| = |(A \cap B)'| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 51 - 31 - 35 + 23 = 8$

۸- $r=1: n^r = {}^r q' + 1$
 ۹- $r=2: n^r = {}^r q' + 2$
 ۱۰- درصت دارد:
 $A \perp B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \times C = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \\ B \times C = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset \end{cases}$
 ۱۱- $A \neq B \Rightarrow A \neq \emptyset, A \neq B$
 $\Rightarrow \exists x \in A, x \notin B, C \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in C$
 $\Rightarrow (x, y) \in A \times C, (x, y) \notin B \times C \Rightarrow A \times C \neq B \times C$
 فرض مسئله در تقاض است بر کمینه است نوبت اول

-۷



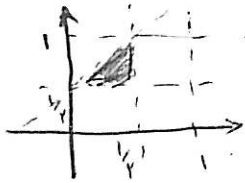
$$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

$$x + y - x > 1 - y \Rightarrow y > 1/2$$

$$x + 1 - y > y - x \Rightarrow y < x + 1/2$$

$$y - x + 1 - y > x \Rightarrow x < 1/2$$

$$A = \{(x, y) \mid x < 1/2, y < x + 1/2, y > 1/2\}$$



$$P(A) = \frac{1}{8}$$

$$P(x) = w \quad \text{عادل}$$

-۸

$$P(y) = 1/2 w$$

$$P(x) = 1/2 w \Rightarrow P(S) = 1 \Rightarrow w + 1/2 w + 1/2 w = 1$$

$$\Rightarrow w = \frac{2}{3} \Rightarrow P(\{x, y\}) = P(x) + P(y) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$(P \Leftrightarrow (r \vee s)) \Rightarrow P \vee q \equiv F$$

-۹

$$P \Leftrightarrow (r \vee s) \equiv T \quad \text{و} \quad P \vee q \equiv F \quad \rightarrow$$

$$P \neq q \equiv F$$

$$r \vee s \equiv F \rightarrow r \neq s \equiv F$$

$$P \Leftrightarrow \neg(P \wedge r) \equiv F \Leftrightarrow T \equiv F$$

$$A = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴\} \quad |A| = ۸$$

-۱۰

الف) $\binom{۷}{۴} = ۳۵$

ب) $۲^۸ - ۲ = ۲۵۶ - ۲ = ۲۵۴$

$$\forall (x, y) \in (A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ و } y \in (A \cap B)$$

-۱۱

$$\Rightarrow x \in A, x \in B, y \in A, y \in B \Rightarrow x \in A, y \in B \text{ و } x \in B, y \in A$$

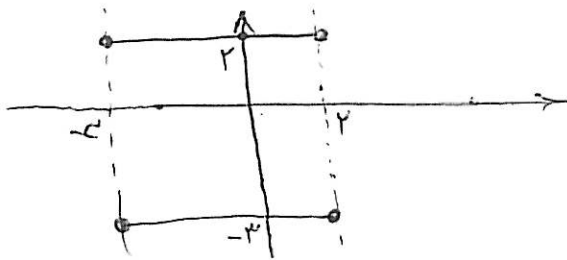
$$\Rightarrow (x, y) \in A \times B, (x, y) \in (B \times A) \Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \subseteq (A \times B) \cap (B \times A)$$

برای هر دو طرف هم زیر مجموعه طرف اول است پس ثابت می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 \text{الف) } A - (A \Delta B) &= A \cap ((A \cup B) - (A \cap B))' = A \cap ((A \cup B) \cap (A \cap B)')' \quad -11 \\
 &= A \cap ((A \cup B)' \cup (A \cap B)) = (A \cap (A \cup B)') \cup (A \cap (A \cap B)) \\
 &= A \cap (A \cap B) = A \cap B
 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } A \cup (A \cap B) = (A \cap M) \cup (A \cap B) = A \cap (M \cup B) = A$$



$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{3!} = 15$$

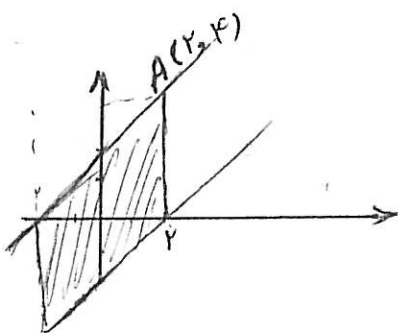
$$\frac{\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1}}{3!} = 90 \Rightarrow 90 \text{ حالت}$$

$$\frac{\binom{6}{4} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1}}{2!} = 15$$

$$P(\text{مقابل يك رو}) = 1 - P(\text{مقابل زوت}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq .99 \quad -12$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 7$$

مقابل $n = 7$



$$|A \cap B| = \sqrt{2+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|A \cap B'| = \{1, 2, \dots, 6\} \Rightarrow |A \cap B'| = 6 - 3 + 1 = 4 \quad -13$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{93}{9937} - \frac{1}{9937} = \frac{92}{9937}$$